PROBABILITY
AND
MATHEMATICAL STATISTICS

Vol. 8 (1987), p. 27–39

UN PROBLEME DE MOYENNE DANS LA BOULE EUCLIDIENNE

PAR

EDOUARD GLOUKHIAN (PARIS)

Abstract. The paper deals with the study of mean values of a function f of one argument on some random distances ξ defined in a Euclidean sphere. Some integral operator is introduced and the inverse operator is founded. In comparison to a previous paper [2], a particular radial density is introduced in the sphere.

GENERALITES

Soient, dans R^n, $\Omega = B^n(R)$ la boule euclidienne de rayon R de centre à l'origine des coordonnées, $\mathscr{B}_\Omega$ la tribu borélienne sur Ω. On définit comme suit une mesure de probabilité μ sur $(\Omega, \mathscr{B}_\Omega)$. Soit φ une fonction d'une variable, positive, définie sur $[0, R]$. Elle définit sur Ω une fonction radiale $\varphi(r) = \varphi(\|x\|)$. Pour des raisons qui apparaîtront plus tard, nous prendrons φ sous la forme $t \to A^{-1}(R^2-t^2)^q$, où $q \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$, et A étant un coefficient de normalisation

$$A = \int_\Omega \varphi(\|x\|)\, dx = |S^{n-1}| \int_0^R t^{n-1}(R^2-t^2)^q\, dt$$
$$= |S^{n-1}| \frac{R^{n+2q}}{2} \frac{\Gamma(n/2)\Gamma(q+1)}{\Gamma((n+2q+2)/2)},$$

où S^{n-1} est la sphère unité, $|S^{n-1}|$ son aire. On pose, par définition,

$$d\mu(x) = \frac{1}{A}(R^2-\|x\|^2)^q\, dx$$

et on note $(\Omega, \mathscr{B}_\Omega, \mu)$ l'espace probabilisé correspondant à cette mesure.

Par ailleurs, on considère l'espace probabilisé $(S^{n-1}, \mathscr{B}_{S^{n-1}}, \sigma^{n-1})$, σ^{n-1} étant la mesure de Lebesgue (normalisée) sur S^{n-1}.

POSITION DU PROBLEME

On prend pour espace probabilisé $(\Omega \times S^{n-1}, \mathscr{B}_\Omega \otimes \mathscr{B}_{S^{n-1}}, \mu \otimes \sigma^{n-1})$. On définit sur cet espace une variable aléatoire ξ comme suit. Soit $(x, \omega) \in \Omega \times S^{n-1}$. La demi-droite $x + \boldsymbol{R}_+ \omega$ rencontre la frontière $S^{n-1}(R)$ de la boule en un point unique $x' = x'(\omega)$. Par définition, ξ est l'application $(x, \omega) \mapsto \|x' - x\|$. De même, la demi-droite $x - \boldsymbol{R}_+ \omega$ rencontre $S^{n-1}(R)$ en un point unique $x''(\omega)$. On note η l'application $(x, \omega) \mapsto \|x'' - x\|$. A présent, pour toute fonction numérique f Lebesgue-intégrable sur $[0, R]$, on définit la moyenne de f sur les ξ dans $B^n(R)$ par l'intégrale

$$g(R) = \frac{1}{A} \int_{\Omega \times S^{n-1}} \varphi(\|x\|) f(\xi(x, \omega)) \, dx d\sigma^{n-1}(\omega).$$

Par raison de commodité, on notera aussi $\overline{f(\xi(R))}$ cette moyenne.

On se propose:

1. de calculer les moments $\overline{\xi^k(R)}$;
2. d'inverser la transformation intégrale (1), c'est-à-dire de reconstituer f à partir de g prise dans une certaine classe;
3. de trouver la densité de la variable aléatoire ξ.

REDUCTION DE L'INTEGRALE (1) A UNE INTEGRALE DOUBLE

Les raisonnements qui suivent sont valables pour φ quelconque positive. Le coefficient de normalisation A vaut ici

$$A = \int_\Omega \varphi(\|x\|) \, dx = |S^{n-1}| \int_0^R \varphi(r) r^{n-1} \, dr.$$

L'intégrale (1) s'écrit

$$g(R) = \frac{1}{A} \int_{\Omega \times S^{n-1}} \varphi(\|x\|) f(\xi(x, \omega)) \, dx d\sigma^{n-1}(\omega).$$

On passe en coordonnées polaires. Le lien entre les coordonnées sphériques d'un point ω de la sphère unité S^{n-1} et ses coordonnées cartésiennes $(y_1, \ldots, y_n)$ est donné par les formules

$$\begin{aligned}
y_1 &= \sin \alpha_{n-1} \ldots \sin \alpha_2 \sin \alpha_1, \\
y_2 &= \sin \alpha_{n-1} \ldots \sin \alpha_2 \cos \alpha_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_{n-1} &= \sin \alpha_{n-1} \cos \alpha_{n-2}, \\
y_n &= \cos \alpha_{n-1},
\end{aligned}$$

où $0 \leqslant \alpha_1 < 2\pi$ et $0 \leqslant \alpha_k < \pi$ pour $k \neq 1$. On a

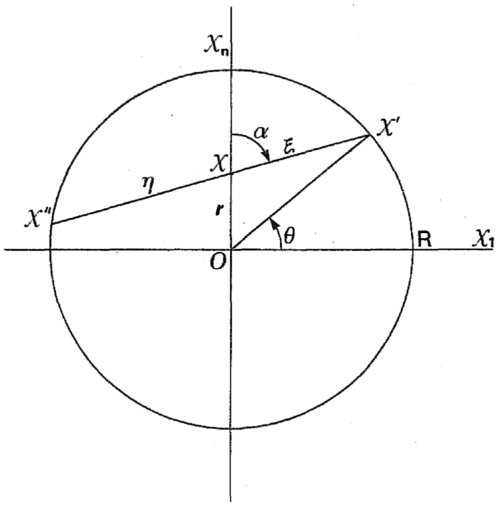
$$d\sigma^{n-1}(\omega) = \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}} \sin^{n-2}\alpha_{n-1} \dots \sin\alpha_2 \, d\alpha_1 \dots d\alpha_{n-1}.$$

Notons que si l'angle α_{n-1} est fixé, alors que $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}$ varient, la distance ξ est constante (le vecteur $\vec{\xi} = x' - x$ tourne autour de la droite définie par les points O et x). Intégrons sur $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}$ dans leurs intervalles de définition (théorème de Fubini) et posons $\alpha_{n-1} = \alpha$. On a

$$g(R) = \frac{1}{A} \int_{\Omega \times [0,\pi[} \varphi(\|x\|) f(\xi(x, \alpha)) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2)} \sin^{n-2}\alpha \, d\alpha \, dx.$$

Intégrons encore dans la couche sphérique de rayon $\|x\| = r$, d'épaisseur dr. On obtient

$$g(R) = \frac{1}{A} \int_0^R \int_0^\pi \varphi(r) |S^{n-1}| r^{n-1} f(\xi(r, \alpha)) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2)} \sin^{n-2}\alpha \, dr \, d\alpha.$$



La distance ξ s'exprime en fonction de r et R et de l'angle central θ (si x est pris sur l'axe Ox_n, θ est l'angle indiqué sur la figure)

(2) $$\xi = (R^2 - 2Rr\sin\theta + r^2)^{1/2}$$

et

$$\sin^{n-2}\varphi \, d\varphi = R^{n-1} \frac{\cos^{n-2}\theta (R - r\sin\theta)}{(R^2 - 2Rr\sin\theta + r^2)^{1/2}} (-d\theta).$$

On obtient pour g l'expression

$$g(R) = \frac{1}{\int\limits_0^R \varphi(r)\, r^{n-1}\, dr} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2)} R^{n-1} \times$$

$$\times \int\limits_0^R \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi(r)\, r^{n-1} f(\xi) \frac{r^{n-1}\cos^{n-2}\theta\,(R - r\sin\theta)\, dr\, d\theta}{(R^2 - 2Rr\sin\theta + r^2)^{n/2}}.$$

Si l'on prend φ sous la forme particulière indiquée, on obtient

$$g(R) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((n+2q+2)/2)}{\Gamma((n-1)/2)\,\Gamma(q+1)} \frac{1}{R^{2q+1}} \times \tag{3}$$

$$\times \int\limits_0^R \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\xi) \frac{(R^2 - r^2)^q\, r^{n-1}\cos^{n-2}\theta\,(R - r\sin\theta)\, dr\, d\theta}{(R^2 - 2Rr\sin\theta + r^2)^{n/2}}$$

ou encore, par un changement de variable évident,

$$g(R) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((n+2q+2)/2)}{\Gamma((n-1)/2)\,\Gamma(q+1)} \times \tag{4}$$

$$\times \int\limits_0^1 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} f(R\xi) \frac{(1 - r^2)^q\, r^{n-1}\cos^{n-2}\theta\,(1 - r\sin\theta)\, dr\, d\theta}{(1 - 2r\sin\theta + r^2)^{n/2}},$$

avec ici $\xi = (1 - 2r\sin\theta + r^2)^{1/2}$, ce qui, en quelque sorte, ramène le problème à la boule unité. Le calcul de cette intégrale pour $f(t) = t^k$ (nous l'indiquons à la fin du texte) donne les moments

$$\overline{\xi^k(R)} = \frac{2^{k+2q}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n+2q+2}{2}\right) \frac{\Gamma(k+q+1)\,\Gamma((k+2q+1)/2)}{\Gamma(k+2q+1)\,\Gamma((n+k+2q+2)/2)} R^k, \quad q > -\tfrac{1}{2}. \tag{5}$$

On voit que la fonction t^k est un vecteur propre pour l'*opérateur moyenne* défini par (1), (3) ou (4), le coefficient de R^k dans (5), soit $\overline{\xi^k(1)}$, étant la valeur propre correspondante.

INVERSION DE L'OPÉRATEUR INTÉGRALE MOYENNE

Ci-dessous, on note $C^m_{[0,a]}$ l'espace des fonctions m fois continûment dérivables sur $[0, a]$ et C^m_+ sur $\mathbf{R}_+$. On suppose q entier.

THÉORÈME. *L'opérateur moyenne définit un isomorphisme de* $C^m_{[0,2a]}$ *sur* $C^{m+q+(n+1)/2}_{[0,a]}$ *si* n *est impair, et de* $C^m_{[0,2a]}$ *sur* $C^{m+q+(n+2)/2}_{[0,a]}$ *si* n *est pair. En particulier, il définit un automorphisme de* C^∞_+. *On a les formules d'inversion:*

$$(5_1)\qquad t^q f(t)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{(n+4q+1)/2}\,\Gamma\big((n+2q+2)/2\big)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{q+1}\left(\frac{d}{tdt}\right)^{(n-1)/2} t^{n+2q}\,g\left(\frac{t}{2}\right)$$

pour n impair,

$$(5_2)\qquad t^q f(t)=\frac{1}{2^{(n+4q+2)/2}\,\Gamma\big((n+2q+2)/2\big)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{q+1}\left(\frac{d}{tdt}\right)^{n/2}\times$$

$$\times\int_0^{t^2} u^{(n+2q)/2}\,g\left(\frac{\sqrt{u}}{2}\right)(t^2-u)^{-1/2}\,du \qquad \text{pour } n \text{ pair.}$$

Schéma de la démonstration. Il ressort de (4) que la classe de dérivabilité de g est au moins celle de f. Disposant des moments (5), on peut reprendre la filière utilisée dans [2]. On écrit l'expression de la moyenne pour f prise dans la classe des fonctions entières, puis on passe aux $f\in C^m_{[0,a]}$ en appliquant un théorème de prolongement (cf. [1] ou [6]). On a

$$g(R)=\sum_0^\infty R^k\frac{g^{(k)}(0)}{k!}=\overline{f(R\xi(1))}=\sum_0^\infty R^k\,\overline{\xi^k(1)\frac{f^{(k)}(0)}{k!}}$$
$$=\sum_0^\infty R^k\,\overline{\xi^k(1)}\frac{f^{(k)}(0)}{k!},$$

d'où $f^{(k)}(0)=g^{(k)}(0)/\overline{\xi^k(1)}$, et, par conséquent,

$$f(t)=\sum_0^\infty\frac{t^k}{k!}f^{(k)}(0)=\sum_0^\infty\frac{t^k}{k!}\,\frac{g^{(k)}(0)}{\overline{\xi^k(1)}}.$$

Nous allons transformer la solution obtenue sous cette forme. Remplaçons $\overline{\xi^k(1)}$ par son expression (5) (avec $R=1$). Il vient

$$f(t)=\sum_{k=0}^\infty\frac{g^{(k)}(0)}{k!}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2^{k+2q}}\,\frac{1}{\Gamma\big((n+2q+2)/2\big)}\,\frac{\Gamma(k+2q+1)}{\Gamma(k+q+1)}\times$$
$$\times\frac{\Gamma\big((n+k+2q+2)/2\big)}{\Gamma\big((k+2q+1)/2\big)}\,t^k.$$

Soit n impair. Les deux derniers rapports en Γ se simplifient en vertu de la formule $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$, et on obtient

$$f(t)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2q}\,\Gamma\big((n+2q+2)/2\big)}\sum_{k=0}^\infty\frac{g^{(k)}(0)}{2^k\,k!}(k+q+1)\ldots(k+2q)\frac{k+2q+1}{2}\ldots$$
$$\ldots\frac{k+n+2q}{2}\,t^k,$$

$$t^q f(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{(n+1)/2+2q}\Gamma((n+2q+2)/2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{2^k k!}(k+q+1)\dots(k+2q) \times$$
$$\times (k+2q+1)\dots(k+n+2q)\, t^{k+q}.$$

On se débarasse des facteurs $(k+q+1)\dots(k+n+2q)$ par des intégrations successives

(6)
$$t\int_0^t T_{(n-1)/2} \int_0^{T_{(n-1)/2}} \dots T_1 \int_0^{T_1}\int_0^{T}\int_0^{\tau_{q-1}} \dots \int_0^{\tau_1} \tau^q f(\tau)\, d\tau\, d\tau_1 \dots d\tau_{q-1}\, dT\, dT_1 \dots dT_{(n-1)/2}$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{(n+1)/2+2q}\Gamma((n+2q+2)/2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{2^k k!} t^{k+2q+n+1}$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}\, t^{n+2q+2}}{2^{(n+1)/2+2q}\Gamma((n+2q+2)/2)}\, g\left(\frac{t}{2}\right).$$

On rappelle que

$$\int_0^{\tau_q} \dots \int_0^{\tau_1} f(\tau)\, d\tau\, d\tau_1 \dots d\tau_{q-1} = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{\tau_q} (\tau_q - \tau)^{q-1}\, d\tau,$$

et on vérifie par récurrence que

$$\tau_p \int_0^{\tau_p} \dots \tau_1 \int_0^{\tau_1} f(\tau)\, d\tau\, d\tau_1 \dots d\tau_{p-1} = \frac{\tau_p}{\Gamma(p)} \int_0^{\tau_p} \left(\frac{\tau_p^2}{2} - \frac{\tau^2}{2}\right)^{p-1} f(\tau)\, d\tau.$$

Dès lors, l'égalité (6) s'écrit

$$(7) \quad \frac{t}{\Gamma((n+1)/2)} \int_0^t \left(\frac{t^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right)^{(n-1)/2} \left\{\frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^y (y-\tau)^{q-1} \tau^q f(\tau)\, d\tau\right\} dy$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}\, t^{n+2q+1}}{2^{(n+1)/2+2q}\Gamma((n+2q+2)/2)}\, g\left(\frac{t}{2}\right).$$

Remarquons que si l'on fait, dans (7), $f(\tau) = \tau^k$, on retrouve les moments (5) $\overline{\xi^k(R)}$ quel que soit n impair ou pair. Tout ce qui suit vaudra donc pour tous les n. Notons $\psi(y)$ l'intégrale de Liouville dans (7):

$$(8) \qquad \psi(y) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^y (y-\tau)^{q-1} \tau^q f(\tau)\, d\tau.$$

Alors (7) s'écrit

$$(9) \quad \frac{1}{2^{(n-1)/2}\Gamma((n+1)/2)}\int_0^t (t^2-y^2)^{(n-1)/2}\psi(y)\,dy = \frac{\sqrt{\pi}\,t^{n+2q}}{2^{(n+1)/2+2q}\Gamma((n+2q+2)/2)}\,g\left(\frac{t}{2}\right).$$

La résolution de cette équation intégrale de fonction inconnue ψ fait intervenir la dérivation d'ordre fractionnaire, étudiée, par exemple, dans l'ouvrage de Guelfand et Chilov [5], ch. I, § 4, rubrique 5. Faisons, dans (9), $y^2 = u$, puis remplaçons t^2 par t. On obtient

$$\frac{1}{\Gamma((n+1)/2)}\int_0^t (t-u)^{(n-1)/2}\frac{\psi(\sqrt{u})}{\sqrt{u}}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2q}\Gamma((n+2q+2)/2)}\,t^{(n+2q)/2}\,g\left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right),$$

ce qu'on peut mettre sous la forme

$$(10) \quad \frac{t_+^{(n-1)/2}}{\Gamma((n+1)/2)} * \frac{\psi(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2q}\Gamma((n+2q+2)/2)}\,t^{(n+2q)/2}\,g\left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right).$$

Ici on a introduit la distribution t_+^{λ} définie dans [5], ch. 1, § 3, rubrique 2. La résolution de cette équation de convolution conduit à:

1. *n impair*.

$$\frac{\psi(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2q}\Gamma((n+2q+2)/2)}\,\frac{t_+^{-(n+3)/2}}{\Gamma(-(n+1)/2)} * t^{(n+2q)/2}\,g\left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2q}\Gamma((n+2q+2)/2)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{(n+1)/2} t^{(n+2q)/2}\,g\left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right),$$

d'où

$$\frac{\psi(t)}{t} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{(n+4q+1)/2}\Gamma((n+2q+2)/2)}\left(\frac{d}{t\,dt}\right)^{(n+1)/2} t^{n+2q}\,g\left(\frac{t}{2}\right).$$

Compte tenu de l'expression (8) pour $\psi(t)$, on trouve

$$t^q f(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{(n+4q+1)/2}\Gamma((n+4q+2)/2)}\left(\frac{d}{dt}\right)^q t\left(\frac{d}{t\,dt}\right)^{(n+1)/2} t^{n+2q}\,g\left(\frac{t}{2}\right),$$

ce qu'on identifie avec la formule (5_1), si l'on note que $(d/dt)\,t\,(d/t\,dt) = (d/dt)^2$.

2. *n pair*. On convole alors avec $t_+^{-(n+3)/2}/\Gamma(-(n+1)/2)$, ce qui donne

$$\frac{\psi(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2q}\Gamma((n+2q+2)/2)}\,\frac{t_+^{-(n+3)/2}}{\Gamma(-(n+1)/2)} * t^{(n+2q)/2}\,g\left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right).$$

On écrit ici

$$\frac{t_+^{-(n+3)/2}}{\Gamma(-(n+1)/2)} = \frac{t_+^{-(n+4)/2}}{\Gamma(-(n+2)/2)} * \frac{t^{-1/2}}{\Gamma(1/2)},$$

et, par conséquent,

$$\frac{\psi(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2q}\Gamma((n+2q+2)/2)} \left(\frac{d}{dt}\right)^{(n+2)/2} \int_0^t u^{(n+2q)/2} g\left(\frac{\sqrt{u}}{2}\right) \frac{(t-u)^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} du,$$

d'où

$$\frac{\psi(t)}{t} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{(n+4q+2)/2}\Gamma((n+2q+2)/2)} \left(\frac{d}{t\,dt}\right)^{(n+2)/2} \times$$
$$\times \int_0^{t^2} u^{(n+2q)/2} g\left(\frac{\sqrt{u}}{2}\right) \frac{(t^2-u)^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} du.$$

Il vient en vertu de (8)

$$t^q f(t) = \frac{1}{2^{(n+4q+2)/2}\Gamma((n+2q+2)/2)} \left(\frac{d}{dt}\right)^q t \left(\frac{d}{t\,dt}\right)^{(n+2)/2} \times$$
$$\times \int_0^{t^2} u^{(n+2q)/2} g\left(\frac{\sqrt{u}}{2}\right) (t^2-u)^{-1/2} du,$$

ce qu'on identifie aussitôt avec la formule (5_2). Le degré de régularité de f et de g est défini par les formules $(5_{1,2})$. La propriété énoncée dans le théorème est évidente pour (5_1) n impair. Pour (5_2), il suffit, pour s'en assurer, de faire dans l'intégrale le changement de variable $u = t^2 s$. Pour $q = 0$, les formules $(5_{1,2})$ se réduisent à leurs homologues $(4_{1,2})$ dans [2].

LOI DE ξ

Elle se déduit de l'expression (7) pour g, dans laquelle on pose $t = 2R$:

$$g(R) = \frac{\Gamma((n+2q+2)/2)}{\sqrt{\pi}\, 2^{n-1}\Gamma((n+1)/2)\Gamma(q)} \frac{1}{R^{n+2q}} \times$$
$$\times \int_0^{2R} (4R^2-y^2)^{(n-1)/2} \left\{\int_0^y (y-\tau)^{q-1} \tau^q f(\tau)\, d\tau\right\} dy.$$

Il vient en changeant l'ordre des intégrations

$$g(R) = \frac{\Gamma((n+2q+2)/2)}{\sqrt{\pi}\, 2^{n-1}\Gamma((n+1)/2)\Gamma(q)} \frac{1}{R^{n+2q}} \times \tag{11}$$
$$\times \int_0^{2R} \left\{\int_\tau^{2R} (4R^2-y^2)^{(n-1)/2} (y-\tau)^{q-1} dy\right\} \tau^q f(\tau)\, d\tau.$$

Posons

$$\lambda(2R, \tau) = \int_{\tau}^{2R} (4R^2 - y^2)^{(n-1)/2} (y-\tau)^{q-1}\, dy. \tag{12}$$

L'expression

$$\frac{\Gamma((n+2q+2)/2)}{\sqrt{\pi}\, 2^{n-1}\, \Gamma((n+1)/2)\, \Gamma(q)} \frac{1}{R^{n+2q}} \tau^q \lambda(2R, \tau)$$

est la densité de ξ (si l'on fait dans (11) $f(\tau) = \tau^k$ on obtient les moments). Nous allons faire apparaître dans (12) la fonction hypergéométrique

$$F(\alpha, \beta, \gamma; \zeta) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-t\zeta)^{-\alpha}\, dt. \tag{13}$$

Par le changement de variable $\zeta = (y-\tau)/(2R-\tau)$ on ramène l'intégration à l'intervalle [0, 1]. On a

$$\begin{aligned} y-\tau &= (2R-\tau)\zeta, \qquad dy = (2R-\tau)\, d\zeta, \\ 4R^2 - y^2 &= 4R^2 - \tau^2 - 2\tau(2R-\tau)\zeta - (2R-\tau)^2\zeta^2 \\ &= (2R-\tau)(2R+\tau)(1-\zeta)\left(1 - \frac{\tau-2R}{\tau+2R}\zeta\right), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \lambda(2R, \tau) = (2R+\tau)^{(n-1)/2}(2R-\tau)^{(n+2q-1)/2} \int_0^1 \zeta^{q-1}(1-\zeta)^{(n-1)/2} \times \\ \times \left(1 - \frac{\tau-2R}{\tau+2R}\zeta\right)^{(n-1)/2} d\zeta. \end{aligned}$$

L'expression (11) pour $g(R)$ s'écrit à présent

$$\begin{aligned} g(R) = \frac{\Gamma((n+2q+2)/2)}{\sqrt{\pi}\, 2^{n-1}} \frac{1}{R^{n+2q}} \int_0^{2R} (2R+\tau)^{(n-1)/2}(2R-\tau)^{(n+2q-1)/2} \times \\ \times \frac{1}{\Gamma((n+2q+1)/2)} \left\{ \frac{\Gamma((n+2q+1)/2)}{\Gamma((n+1)/2)\Gamma(q)} \times \right. \\ \left. \times \int_0^1 \zeta^{q-1}(1-\zeta)^{(n-1)/2}\left(1 - \frac{\tau-2R}{\tau+2R}\right)^{(n-1)/2} d\xi \right\} \tau^q f(\tau)\, d\tau, \end{aligned}$$

et donc, en vertu de (13),

$$g(R) = \frac{\Gamma((n+2q+2)/2)}{\sqrt{\pi}\, 2^{n-1}\, \Gamma((n+2q+1)/2)} \frac{1}{R^{n+2q}} \times \tag{14}$$

$$\times \int_0^{2R} (2R+\tau)^{(n-1)/2} (2R-\tau)^{(n+2q-1)/2} \times$$

$$\times F\left(\frac{1-n}{2}, q, \frac{n+2q+1}{2}; \frac{\tau-2R}{\tau+2R}\right)\tau^q f(\tau)\, d\tau.$$

Ainsi, la transformation intégrale (1), (3) ou (4) se réduit à l'intégrale simple (14). L'expression de la densité est

$$(15)\qquad h_q(\tau) = \frac{\Gamma((n+2q+2)/2)}{\sqrt{\pi}\, 2^{n-1}\, \Gamma((n+2q+1)/2)} \frac{1}{R^{n+2q}} (2R+\tau)^{(n-1)/2} \times$$

$$\times (2R-\tau)^{(n+2q-1)/2} F\left(\frac{1-n}{2}, q, \frac{n+2q+1}{2}; \frac{\tau-2R}{\tau+2R}\right)\tau^q, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 2R.$$

Notons que pour n impair F est un polynôme en $(\tau-2R)/(\tau+2R)$.

Deux cas particuliers.

1. Soit $q = 0$ (la loi de x est uniforme sur la boule). Alors $F = 1$, et les formules (14) et (15) se réduisent respectivement à

$$(16)\qquad g(R) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((n+2)/2)}{\Gamma((n+1)/2)} \frac{1}{(2R)^n} \int_0^{2R} (4R^2-\tau^2)^{(n-1)/2} f(\tau)\, d\tau,$$

$$(17)\qquad h(\tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((n+2)/2)}{\Gamma((n+1)/2)} \frac{1}{(2R)^n} (4R^2-\tau^2)^{(n-1)/2}, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 2R.$$

La densité (17) a été déduite par la voie géométrique dans [7].

2. Soit à présent $q \to \infty$. Reprenons l'expression des moments (5) en y mettant q en évidence:

$$(18)\qquad \overline{\xi^k(R)_q} = \frac{2^{k+2q}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n+2q+2}{2}\right) \frac{\Gamma(k+q+1)}{\Gamma(k+2q+1)} \frac{\Gamma((n+2q+1)/2)}{\Gamma((n+k+2q+2)/2)} R^k.$$

Compte tenu de la formule

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right),$$

les moments (18) s'écrivent aussi

$$\overline{\xi^k(R)_q} = \frac{\Gamma(n/2+q+1)}{\Gamma(k/2+q+1)} \frac{\Gamma(k+g+1)}{\Gamma((n+k)/2+q+1)} R^k.$$

On applique la formule $\lim_{a\to\infty} \Gamma(a+\alpha)/a^{\alpha}\Gamma(a) = 1$. Elle donne

$$\lim_{q\to\infty} \overline{\xi^k(R)_q} = R^k.$$

Soit à présent f analytique: $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0)\, t^k/k!$. Alors

$$g(R) = \overline{f(\xi(R))} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\overline{\xi^k(R)} = f(R).$$

Par conséquent, la densité (15) $h_q(\tau)$ devient à la limite $\delta(R-\tau)$. L'interprétation est la suivante. Pour q très grand la quasi-totalité de la masse de la boule est localisée à l'origine. Un point x pris au hasard dans la boule se trouvera au voisinage de l'origine et, pour ce point, $\xi \sim R$, donc $g(R) = \overline{f(\xi)} = f(R)$.

CALCUL DES MOMENTS $\overline{\xi^k(R)_q}$

On obtient leur expression intégrale en posant, dans (3), $f(\xi) = \xi^k$:

$$(19)\qquad \overline{\xi^k(R)_q} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((n+2q+2)/2)}{\Gamma((n-1)/2)\Gamma(q+1)} \frac{1}{R^{2q+1}} \times$$
$$\times \int_0^R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \xi^k \frac{(R^2-r^2)^q r^{n-1} \cos^{n-2}\theta (R-r\sin\theta)}{(R^2-2Rr\sin\theta+r^2)^{n/2}}\, dr\, d\theta,$$

ou, en vertu de (2),

$$(20)\qquad \overline{\xi^k(R)_q} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((n+2q+2)/2)}{\Gamma((n-1)/2)\Gamma(q+1)R^{2q+1}} \times$$
$$\times \int_0^R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(R^2-r^2)^q r^{n-1} \cos^{n-2}\theta (R-r\sin\theta)\, dr\, d\theta}{(R^2-2Rr\sin\theta+r^2)^{(n-k)/2}}.$$

Pour $q = 0$ cette expression se réduit à (on pose dans la suite $\overline{\xi^k(R)_{q=0}} = \overline{\xi^k(R)}$)

$$(21)\qquad \overline{\xi^k(R)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((n+2)/2)}{\Gamma((n-1)/2)R} \int_0^R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^{n-1}\cos^{n-2}\theta (R-r\sin\theta)\, dr\, d\theta}{(R^2-2Rr\sin\theta+r^2)^{(n-k)/2}}.$$

Cette intégrale a été calculée dans [3]. Elle vaut

$$(22)\qquad \overline{\xi^k(R)} = \frac{2^k}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) \frac{\Gamma((k+1)/2)}{\Gamma((n+k+2)/2)} R^k.$$

Nous allons ramener le calcul de l'intégrale (19) ou (20) à celui de l'intégrale plus simple (21). Pour ce faire, nous supposerons dans toute la suite que le point x est uniformément distribué dans la boule: $q = 0$. Considérons. le produit $\xi^a(x, \omega)\eta^b(x, \omega)$, $a > -1$ et $b > -1$. On définit sa moyenne par la formule (1) (écrite pour $q = 0$):

$$(23) \qquad \overline{\xi^a \eta^b} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega \times S^{n-1}} \xi^a(x, \omega)\eta^b(x, \omega)\, dx\, d\sigma^{n-1}(\omega),$$

$|\Omega|$ désignant le volume de $B^n(R)$. Par ailleurs, nous aurons à utiliser la relation fonctionnelle suivante, intéressante par elle-même, établie dans [4]:

$$(24) \qquad \frac{\Gamma(a+b+1)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)} \overline{\xi^a \eta^b} = \overline{\xi^{a+b}}, \qquad p > -1,\ q > -1,\ p+q > -1,$$

qui prend la forme transparente pour a et b entiers: $\overline{\xi^{a+b}} = C^a_{a+b}\overline{\xi^a \eta^b}$.

Indiquons que ces formules sont vraies dans le cas très général où l'on remplace la boule par un domaine convexe quelconque fermé, les distances ξ et η étant définies comme dans la boule.

Pour x fixé dans la boule, le produit $\xi\eta$ est indépendant de $\omega \in S^{n-1}$. On a $\xi\eta = R^2 - \|x\|^2 = R^2 - r^2$, et comme, d'après (2), $\xi = (R^2 - 2Rr\sin\theta + r^2)^{1/2}$, on a

$$(25) \qquad \xi^a \eta^b = \frac{(R^2 - r^2)^b}{(R^2 - 2Rr\sin\theta + r^2)^{(b-a)/2}}.$$

Le passage de la formule (1) à la formule (3) vaut ici pour la moyenne $\overline{\xi^a \eta^b}$ définie par (23). On a

$$\overline{\xi^a \eta^b} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma((n-1)/2)R} \int_0^R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \xi^a \eta^b \frac{r^{n-1}\cos^{n-2}\theta(R - r\sin\theta)\, dr\, d\theta}{(R^2 - 2Rr\sin\theta + r^2)^{n/2}}.$$

En remplaçant le produit $\xi^a \eta^b$ par son expression (25), puis appliquant (24), il vient

$$\overline{\xi^a \eta^b} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((n+2)/2)}{\Gamma((n-1)/2)R} \int_0^R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(R^2 - r^2)^b r^{n-1}\cos^{n-2}\theta(R - r\sin\theta)\, dr\, d\theta}{(R^2 - 2Rr\sin\theta + r^2)^{(n+b-a)/2}}$$

$$= \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)} \overline{\xi^{a+b}}.$$

Remplaçons à présent dans la dernière égalité a par $k+b$, puis appliquons (22). On obtient

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((n+2)/2)}{\Gamma((n-1)/2)R} \int_0^R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(R^2 - r^2)^b r^{n-1}\cos^{n-2}\theta(R - r\sin\theta)\, dr\, d\theta}{(R^2 - 2Rr\sin\theta + r^2)^{(n-k)/2}}$$

$$= \frac{\Gamma(k+b+1)\,\Gamma(b+1)}{\Gamma(k+2b+1)}\,\overline{\xi^{k+2b}}$$

$$= \frac{\Gamma(k+b+1)\,\Gamma(b+1)}{\Gamma(k+2b+1)}\,\frac{2^{k+2b}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma\big((n+2)/2\big)\,\Gamma\big((k+2b+1)/2\big)}{\Gamma\big((n+k+2b+2)/2\big)}\,R^{k+2b}.$$

Les égalités extrêmes donnent lieu à l'égalité suivante:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma\big((n+2b+2)/2\big)}{\Gamma\big((n-1)/2\big)\,\Gamma(b+1)\,R^{2b+1}}\int_0^R\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{(R^2-r^2)^b\,r^{n-1}\cos^{n-2}\theta\,(R-r\sin\theta)\,dr\,d\theta}{(R^2-2Rr\sin\theta+r^2)^{(n-k)/2}}$$

$$= \frac{2^{k+2b}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{n+2b+2}{2}\right)\frac{\Gamma(k+b+1)}{\Gamma(k+2b+1)}\,\frac{\Gamma\big((k+2b+1)/2\big)}{\Gamma\big((n+k+2b+2)/2\big)}\,R^k.$$

Si l'on pose à présent dans cette égalité $b = q$, le premier membre s'identifie à l'expression (20) pour les moments, et le second membre à leur valeur explicite (5).

REFERENCES

[1] J. Dixmier, *Topologie générale*, Paris 1981.

[2] E. Gloukhian, *Sur un opérateur intégral issu d'un problème de probabilité géométrique dans la boule euclidienne*, C. R. Acau. Sci. Paris, Sér. I, Math. 293 (1981), p. 369–371.

[3] – *Moyennes distantielles dans la sphère euclidienne*, Rev. Statist. Appl. Centre d'Enseignement et de Recherche de Statistique Appliquée, Paris, 28.1 (1980), p. 69–75.

[4] – *Sur certaines moyennes en géométrie intégrale*, Thèse de doctorat de troisième cycle, Université Paris-XII, 1983.

[5] I. M. Guelfand et G. E. Chilov, *Les distributions*, t. I, Paris 1962.

[6] L. V. Kantorovitch et G. P. Akilov, *Analyse fonctionnelle dans les espaces normés*, Moscou 1959 (en Russe).

[7] J. Moreau de Saint Martin, *Distribution de distances dans la sphère euclidienne*, Rev. Statist. Appl. Centre d'Enseignement et de Recherche de Statistique Appliquée, Paris, 28.4 (1980), p. 63–66.

8, rue des Alouettes
94140 Alfortville
France

Received on 18. 11. 1985